第２講　絶対値付き２次方程式の解の個数

2　a と b は実数の定数として，次の各問いに答えよ．

(1)　x の方程式 $x^2-4|x-1|+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(2)　x の方程式 $|x^2-4|-ax-3a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(3)　x の方程式 $x^2+a|x-1|+b=0$ が異なる実数解をちょうど2個だけもつような a と b の条件を求め，それを ab 平面に図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　絶対値付き2次方程式の解の個数

2　関数 $f(x)=x^2+x-5|x-1|$ について，$f(x)=k$（k は定数）の異なる実数解の個数を求めよ．

【選択肢】

㋐ $\begin{cases} 4 & (0 \leqq k \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (-15<k<0,\ k>1 \text{ のとき}) \\ 1 & (k=-15 \text{ のとき}) \\ 0 & (k<-15 \text{ のとき}) \end{cases}$

㋑ $\begin{cases} 4 & (1<k<2 \text{ のとき}) \\ 3 & (k=1,\ 2 \text{ のとき}) \\ 2 & (-14<k<1,\ k>2 \text{ のとき}) \\ 1 & (k=-14 \text{ のとき}) \\ 0 & (k<-14 \text{ のとき}) \end{cases}$

㋒ $\begin{cases} 4 & (1 \leqq k \leqq 2 \text{ のとき}) \\ 2 & (-14<k<1,\ k>2 \text{ のとき}) \\ 1 & (k=-14 \text{ のとき}) \\ 0 & (k<-14 \text{ のとき}) \end{cases}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　絶対値付き2次方程式の解の個数

2　a と b は実数の定数として，次の各問いに答えよ．

(1)　x の方程式 $x^2-4|x-1|+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(2)　x の方程式 $|x^2-4|-ax-3a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(3)　x の方程式 $x^2+a|x-1|+b=0$ が異なる実数解をちょうど2個だけもつような a と b の条件を求め，それを ab 平面に図示せよ．

【答】

(1) $\begin{cases} 0 & (a>8\text{ のとき}) \\ 1 & (a=8\text{ のとき}) \\ 2 & (a<-1,\ 0<a<8\text{ のとき}) \\ 3 & (a=-1,\ 0\text{ のとき}) \\ 4 & (-1<a<0\text{ のとき}) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 0 & (-6-2\sqrt{5}<a<0\text{ のとき}) \\ 1 & (a=-6-2\sqrt{5}\text{ のとき}) \\ 2 & (a<-6-2\sqrt{5},\ a=0,\ a>6-2\sqrt{5}\text{ のとき}) \\ 3 & (a=6-2\sqrt{5}\text{ のとき}) \\ 4 & (0<a<6-2\sqrt{5}\text{ のとき}) \end{cases}$

(3)　$b<-1$ $(a\geqq 2)$ または $b<\dfrac{a^2}{4}-a$ $(-2\leqq a<2)$

または $\dfrac{a^2}{4}+a<b<\dfrac{a^2}{4}-a$ $(a<-2)$ または $b<-1$ $(a<-2)$

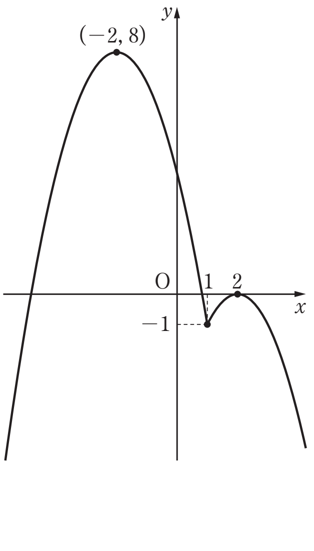
【解答】

(1)　$x^2-4|x-1|+a=0$ より

$$a=-x^2+4|x-1|$$
$$=\begin{cases} -x^2+4(x-1) & (x\geqq 1) \\ -x^2+4(-x+1) & (x<1) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -(x-2)^2 & (x\geqq 1) \\ -(x+2)^2+8 & (x<1) \end{cases}$$

であるので，

$y=-x^2+4|x-1|$ のグラフ



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

と直線 $y=a$ との共有点の個数を考えて，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} \mathbf{0} & (a>8 \text{ のとき}) \\ \mathbf{1} & (a=8 \text{ のとき}) \\ \mathbf{2} & (a<-1,\ 0<a<8 \text{ のとき}) \\ \mathbf{3} & (a=-1,\ 0 \text{ のとき}) \\ \mathbf{4} & (-1<a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)　$|x^2-4|-ax-3a=0$ より $|x^2-4|=a(x+3)$ となるので，$y=|x^2-4|$ と $y=a(x+3)$ について考える．

曲線 $y=x^2-4(x\leqq-2,\ x\geqq2)$ と直線 $y=a(x+3)$ が接するとき

$$x^2-4=a(x+3)$$
$$x^2-ax-3a-4=0$$

が重解をもつので $(-a)^2-4(-3a-4)=0$ すなわち $a^2+12a+16=0$

よって $a=-6\pm2\sqrt{5}$　グラフを考えて $a=-6-2\sqrt{5}$

曲線 $y=-x^2+4(-2<x<2)$ と直線 $y=a(x+3)$ が接するとき

$$-x^2+4=a(x+3)$$
$$x^2+ax+3a-4=0$$

が重解をもつので $a^2-4(3a-4)=0$ すなわち $a^2-12a+16=0$

よって $a=6\pm2\sqrt{5}$　グラフを考えて $a=6-2\sqrt{5}$

よって求める個数は

$$\begin{cases} \mathbf{0} & (-6-2\sqrt{5}<a<0 \text{ のとき}) \\ \mathbf{1} & (a=-6-2\sqrt{5} \text{ のとき}) \\ \mathbf{2} & (a<-6-2\sqrt{5},\ a=0,\ a>6-2\sqrt{5} \text{ のとき}) \\ \mathbf{3} & (a=6-2\sqrt{5} \text{ のとき}) \\ \mathbf{4} & (0<a<6-2\sqrt{5} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3)　$f(x)=x^2+a|x-1|+b$ とおくと

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a(x-1)+b & (x\geqq1) \\ x^2+a(-x+1)+b & (x<1) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-a+b & (x\geqq1) \quad \cdots\cdots① \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a+b & (x<1) \quad \cdots\cdots② \end{cases}$$

であるので，

(Ⅰ)　$a\geqq2$ のとき，$f(x)$ は $x=1$ だけで極値 $f(1)=1+b$ をとり，これは最小値でもある．

(Ⅱ)　$-2\leqq a<2$ のとき，$f(x)$ は $x=\dfrac{a}{2}$ だけで極値 $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+a+b$ をとり，これは最小値でもある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅲ)　$a<-2$ のとき，$f(x)$ の増減は

a	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	╳	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗	$1+b$	↘		↗

となり

$$\begin{aligned}&f\left(-\frac{a}{2}\right)-f\left(\frac{a}{2}\right)\\&=\left(-\frac{a^2}{4}-a+b\right)-\left(-\frac{a^2}{4}+a+b\right)\\&=-2a>0\end{aligned}$$

となるので，$f\left(-\frac{a}{2}\right)>f\left(\frac{a}{2}\right)$ である．

以上より，$f(x)=0$ が異なる実数解をちょうど２個だけもつ条件は

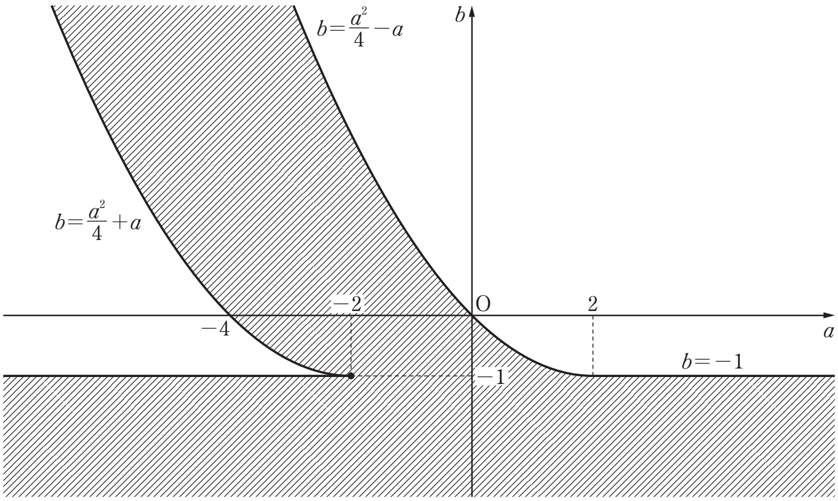
「$a\geqq 2$ かつ $1+b<0$」または「$-2\leqq a<2$ かつ $-\frac{a^2}{4}+a+b<0$」

または「$a<-2$ かつ $\left(-\frac{a^2}{4}+a+b<0<-\frac{a^2}{4}-a+b\right.$ または $\left.0>1+b\right)$」

$\therefore$　$\boldsymbol{b<-1\ (a\geqq 2)}$ **または** $\boldsymbol{b<\frac{a^2}{4}-a\ (-2\leqq a<2)}$

または $\boldsymbol{\frac{a^2}{4}+a<b<\frac{a^2}{4}-a\ (a<-2)}$ **または** $\boldsymbol{b<-1\ (a<-2)}$

ゆえに，求める領域は下図の点 $(-2,\ -1)$ は含み，それ以外の境界は含まない斜線部分．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　絶対値付き2次方程式の解の個数

2　関数 $f(x)=x^2+x-5|x-1|$ について，$f(x)=k$（k は定数）の異なる実数解の個数を求めよ．

【選択肢】

㋐ $\begin{cases} 4 & (0\leqq k\leqq 1\text{のとき}) \\ 2 & (-15<k<0,\ k>1\text{のとき}) \\ 1 & (k=-15\text{のとき}) \\ 0 & (k<-15\text{のとき}) \end{cases}$

㋑ $\begin{cases} 4 & (1<k<2\text{のとき}) \\ 3 & (k=1,\ 2\text{のとき}) \\ 2 & (-14<k<1,\ k>2\text{のとき}) \\ 1 & (k=-14\text{のとき}) \\ 0 & (k<-14\text{のとき}) \end{cases}$

㋒ $\begin{cases} 4 & (1\leqq k\leqq 2\text{のとき}) \\ 2 & (-14<k<1,\ k>2\text{のとき}) \\ 1 & (k=-14\text{のとき}) \\ 0 & (k<-14\text{のとき}) \end{cases}$

【答】 ㋑

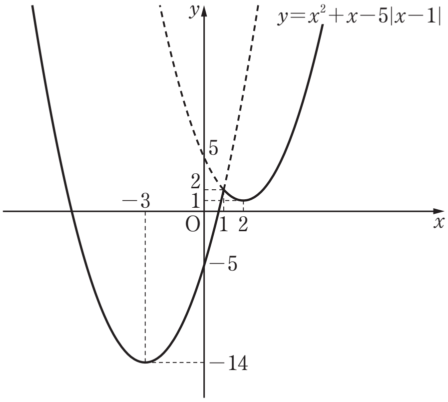
【解答】

与式より

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-5(x-1) & (x-1\geqq 0) \\ x^2+x+5(x-1) & (x-1<0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2-4x+5 & (x\geqq 1) \\ x^2+6x-5 & (x<1) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} (x-2)^2+1 & (x\geqq 1) \\ (x+3)^2-14 & (x<1) \end{cases}$$



となり，$f(1)=2$ であるので，異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} \mathbf{4} & (\mathbf{1<k<2}\text{ のとき}) \\ \mathbf{3} & (\mathbf{k=1,\ 2}\text{ のとき}) \\ \mathbf{2} & (\mathbf{-14<k<1,\ k>2}\text{ のとき}) \\ \mathbf{1} & (\mathbf{k=-14}\text{ のとき}) \\ \mathbf{0} & (\mathbf{k<-14}\text{ のとき}) \end{cases}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。